Ingreso 2022

Matemática Aplicada

CAPÍTULO 1: NÚMEROS REALES

CAPÍTULO 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

CAPÍTULO 1 – LOS NÚMEROS REALES

Los números irracionales

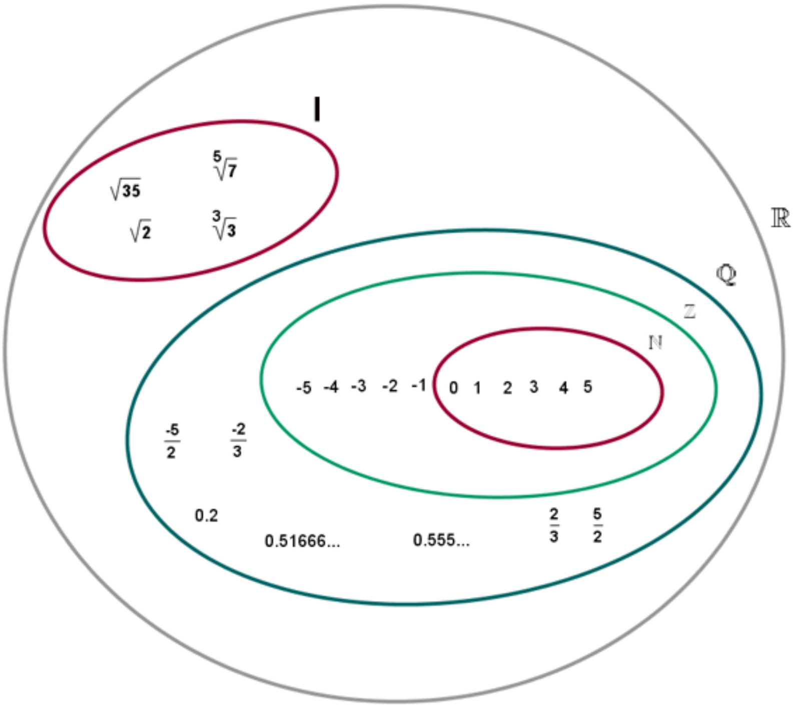
Un **número** es **irracional,** si posee infinitas cifras decimales no periódicas, por tanto **no se puede expresar en forma de fracción**. Los Números Irracionales no pueden expresarse como cociente de 2 Números Enteros.

El **número irracional** más conocido es π, que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. π = 3.141592653589...

Otros **números irracionales** son: **e** = 2.718281828459..., Raíz cuadrada de 2,…

Los números *reales*

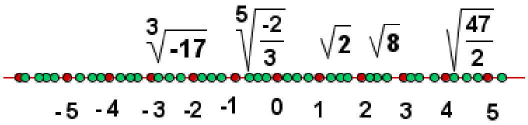
El **conjunto formado** por los números **racionales** e **irracionales** es el conjunto de los ***números reales***, se designa por $\mathbb{R}$.



Con los **números reales** podemos realizar **todas las operaciones, excepto la radicación de índice par y radicando negativo y la división por cero.**

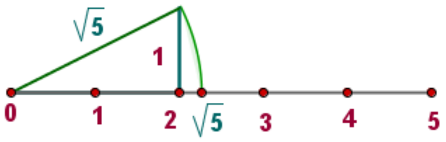
La recta real

A todo **número real** le corresponde un **punto de la recta** y a **todo punto de la recta un número real**.



Los **números reales** pueden ser representados en la recta con tanta aproximación como queramos, pero hay casos en los que podemos representarlos de forma exacta.

$\sqrt{5} = 2^2 + 1^2$



Operaciones con números reales

Suma de números reales

Propiedades

1. **Interna**: El resultado de **sumar dos números reales** es otro **número real**.

a + b $\in \mathbb{R}$

2. **Asociativa**: El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

(a + b) + c = a + (b + c) · $\sqrt{2} + \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \sqrt{5}$

3. **Conmutativa**: El orden de los sumandos no varía la suma:

a + b = b + a $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

4. **Elemento neutro**: El **0** es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

a + 0 = a - π **+ 0 =** π

5. **Elemento opuesto: Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el cero.**

e − e = 0 - El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

La **diferencia** de dos números reales se define como **la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo**: **a − b = a + (−b)**

Multiplicación números reales: La **regla de los signos** del **producto** de los **números enteros y racionales** se sigue manteniendo con los **números reales**.

+ por + = +
- por - = +
+ por - = -
- por + = -

Propiedades

1. **Interna**: **El resultado de multiplicar dos números reales es otro número real.**

$\mathbf{a \cdot b \in \mathbb{R}}$

2. **Asociativa: El modo de agrupar los factores no varía el resultado.** Si a, b y c son números reales cualesquiera, se cumple que:

$\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$

3. **Conmutativa: El orden de los factores no varía el producto.**

$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$ - $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$

4. **Elemento neutro**: **El 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque todo número multiplicado por él da el mismo número.** $\mathbf{a \cdot 1 = a}$ - $\pi \cdot 1 = 1$

5. **Elemento inverso**:

Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad.

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ - $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$

6. **Distributiva**: **El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.**

$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$

7. **Sacar factor común:** Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

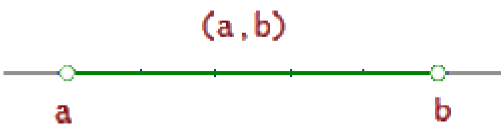
a · b + a · c = a · (b + c)

La división de dos números reales se define como el producto del dividendo por el inverso del divisor.

Intervalos

Los **intervalos** están determinados por dos números que se llaman extremos. En un intervalo se encuentran todos los números comprendidos entre ambos y también pueden estar los extremos.

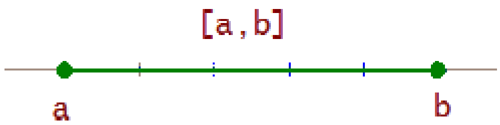
Intervalo abierto: Intervalo abierto, (a, b), es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b.



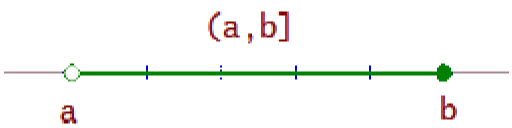
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

Intervalo cerrado: Intervalo cerrado, [a, b], es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$

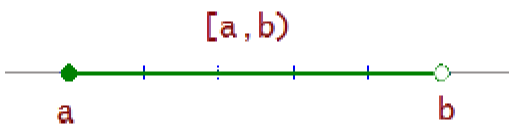


Intervalo semiabierto por la izquierda: Intervalo semiabierto por la izquierda, (a, b], es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b.



$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$

Intervalo semiabierto por la derecha: Intervalo semiabierto por la derecha, [a, b), es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b.



$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$

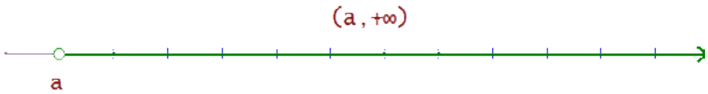
Cuando queremos nombrar un conjunto de puntos formado por dos o más de estos intervalos, se utiliza el signo $\cup$ (**unión**) entre ellos.

Semirrectas

Las **semirrectas** están determinadas por un número. En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores (o menores) que él.

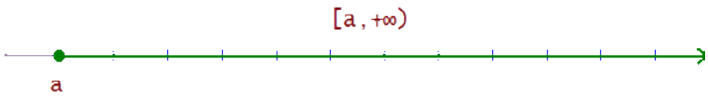
x > a

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < +\infty\}$



x ≥ a

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < +\infty\}$

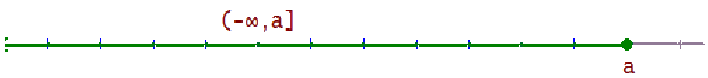


x < a

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\infty < x < a\}$

x ≤ a

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\infty < x \leq a\}$



Valor absoluto de un número real

Valor absoluto de un número real **a**, se escribe **|a|**, es el **mismo número** a cuando es **positivo o cero**, y **opuesto** de a, si a es **negativo**.

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

$|5| = 5 \qquad |-5| = 5 \qquad |0| = 0$

$|x| = 2 \qquad x = -2 \qquad x = 2$

$|x| < 2 \qquad -2 < x < 2 \qquad x \in (-2, 2)$

$|x| > 2 \qquad x < 2$ ó $x > 2 \qquad (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$|x - 2| < 5 \qquad -5 < x - 2 < 5$

$-5 + 2 < x < 5 + 2 \qquad -3 < x < 7$

Propiedades

1 Los números opuestos tienen igual valor absoluto.

$|a| = |-a|$ - $|5| = |-5| = 5$

2El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ - $|5 \cdot (-2)| = |5| \cdot |(-2)| \qquad |-10| = |5| \cdot |2| \qquad 10 = 10$

3El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos.

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|5 + (-2)| \leq |5| + |(-2)| \qquad |3| = |5| + |2| \qquad 3 \leq 7$

$d(-5, 4) = |4 - (-5)| = |4 + 5| = |9|$

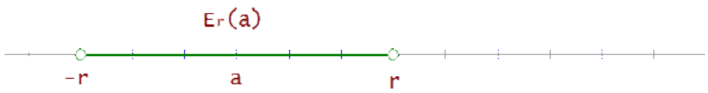
Distancia

La **distancia** entre **dos números reales** a y b, que se escribe **d(a, b)**, se define como el **valor absoluto de la diferencia de ambos números**: **$d(a, b) = |b - a|$**

Entornos

Se llama **entorno de centro a y radio r**, y se denota por **$E_r(a)$** o **E(a,r)**, al **intervalo abierto (a-r, a+r).**

$E_r(a) = (a-r, a+r)$



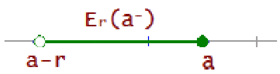
Los entornos se expresan con ayuda del valor absoluto.

$E_r(0) = (-r, r)$ se expresa también **$|x|<r$**, o bien, **$-r < x < r$**.

$E_r(a) = (a-r, a+r)$ se expresa también **$|x-a|<r$**, o bien, a **$a-r < x < a+r$**.

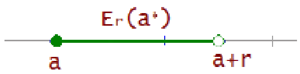
Entornos laterales: Por la izquierda

$E_r(a^-) = (a-r, a)$



Por la derecha

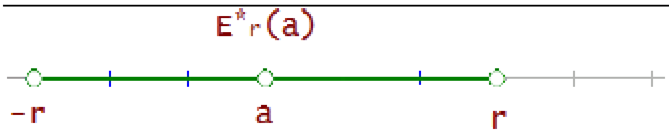
$E_r(a^+) = (a, a+r)$



Entorno reducido

Se emplea cuando se quiere saber qué pasa en las proximidades del punto, sin que interese lo que ocurre en dicho punto.

$E_r^*(a) = \{ x \in (a-r, a+r), x \neq a\}$



Potencias

Con exponente entero

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad a \neq 0 \qquad$ $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

Con exponente racional

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ - $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Propiedades

1. $\mathbf{a^0 = 1}$ · - 2. $\mathbf{a^1 = a}$

3. **Producto de potencias con la misma base**: Es otra potencia con **la misma base** y cuyo **exponente** es la **suma de los exponentes**.

$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ - $(-2)^5 \cdot (-2)^2 = (-2)^{5+2} = (-2)^7 = -128$

4. **División de potencias con la misma base**: Es otra potencia con la **misma base** y cuyo **exponente** es la **diferencia de los exponentes**.

$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$ - $(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$

5. **Potencia de una potencia**: Es otra potencia con l**a misma base** y cuyo **exponente** es el **producto de los exponentes**.

$\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ - $[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64$

6. **Producto de potencias con el mismo exponente**: Es otra potencia con el **mismo exponente** y cuya **base** es el **producto de las bases**

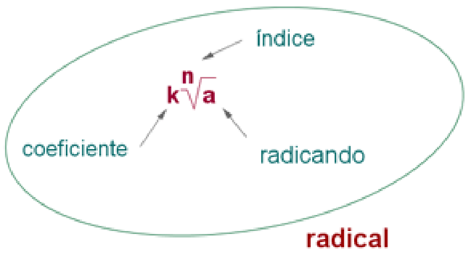
aⁿ · b ⁿ = (a · b) ⁿ - $(-2)^3 \cdot (3)^3 = (-6)^3 = -216$

7. **Cociente de potencias con el mismo exponente**: Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases.

$a^n : b^n = (a : b)^n$ - $(-6)^3 : 3^3 = (-2)^3 = -8$

Radicales

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que n $\in \mathbb{N}$ y a $\in \mathbb{R}$; con tal que cuando *a* sea negativo, *n* ha de ser impar.



$\sqrt{64} = \pm 8$ $\qquad \sqrt{-64} \notin \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad \sqrt[3]{-8} = -2$

Se puede expresar un radical en forma de potencia:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ - $\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$

Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}}$ $\qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$

Si se multiplican o dividen el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

Simplificación de radicales

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical simplificado.

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Reducción de radicales a índice común

1Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice

2**Dividimos el común índice por cada uno de los índices** y cada resultado obtenido **se multiplica por sus exponentes** correspondientes.

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} \qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$$

$$\text{m.c.m.}(2,\ 3,4) = 12$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^2\right)^4} \qquad \sqrt[12]{\left(2^2\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^3}$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} \qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$$

Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

Introducción de factores dentro del signo radical

Se introducen los factores elevados al índice correspondiente del radical.

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^4 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

Operaciones con radicales

Suma de radicales

Solamente pueden sumarse (o restarse) dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales con el mismo índice e igual radicando.

$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\sqrt[4]{5} = 0$$

$$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Multiplicación de radicales

Radicales del mismo índice

Para multiplicar radicales con el mismo índice **se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación extraeremos factores del radical, si es posible.

Radicales de distinto índice

Primero se [reducen a índice común]() y luego se multiplican.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27} =$$

$$m.c.m.(2, 3, 4) = 12$$

$$\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{(3^2)^4}\cdot\sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6\cdot 3^8\cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$$

$$\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{36} =$$

$$m.c.m.(2, 3) = 6$$

$$\sqrt[6]{12^3}\cdot\sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2\cdot 3)^3\cdot(2^2\cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{2^6\cdot 3^3\cdot 2^4\cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10}\cdot 3^7} = 6\sqrt{2^4\cdot 3}$$

División de radicales

Radicales del mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Radicales de distinto índice

Primero se [reducen a índice común]() y luego se dividen.

Cuando terminemos de realizar una operación simplificaremos el radical, si es posible.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} = \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\sqrt[3]{2^2} = 4\sqrt[3]{4}$$

Potencia de radicales

Para elevar un radical a una potencia **se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice.**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{\left(2\cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[3]{2^2\cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4}\cdot\sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{\left(2^2\cdot 3\right)^4}\cdot 18}{\sqrt{(2\cdot 3)^4}} =$$

$$= \frac{18\cdot\sqrt[3]{2^8\cdot 3^4}}{\sqrt{2^4\cdot 3^4}} = 18\sqrt[6]{\frac{\left(2^8\cdot 3^4\right)^2}{\left(2^4\cdot 3^4\right)^3}} = 18\sqrt[6]{\frac{2^{16}\cdot 3^8}{2^{12}\cdot 3^{12}}} =$$

$$= 18\sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(2^4\right)^4\cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16}\cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$$

Racionalizar

Consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1Del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

2Del tipo $\dfrac{a}{b\ \sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\ \sqrt[n]{c^m}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\ \sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\ \sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\ \sqrt[n]{c^n}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\ \sqrt[5]{4}}=\frac{2}{3\ \sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\ \sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2\ \sqrt[5]{8}}{3\ \sqrt[5]{2^5}}=\frac{2\ \sqrt[5]{8}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3Del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$a+b \quad \rightarrow \quad a-b$

$-a+b \quad \rightarrow \quad -a-b$

$a-b \quad \rightarrow \quad a+b$

$-a-b \quad \rightarrow \quad -a+b$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{16-4\cdot 2}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{8}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}{\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{12}}{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{2^2\cdot 3}}{25-4\cdot 6}=\frac{10\sqrt{2}+8\sqrt{3}}{25-24}=10\sqrt{2}+8\sqrt{3}$$

CAPÍTULO 2 - EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números ligada por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Expresiones algebraicas comunes

El **doble** de un número: 2x, El **triple** de un número: 3x, El **cuádruplo** de un número: 4x

La **mitad** de un número: x/2. Un **tercio** de un número: x/3. Un **cuarto** de un número: x/4.

Un número al **cuadrado**: x^2 · Un número al **cubo**: x^3

Dos números **consecutivos**: x y x + 1. Dos números **consecutivos pares**: 2x y 2x + 2.

Dos números **consecutivos impares**: 2x + 1 y 2x + 3.

Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica, para un determinado valor, es el número que se obtiene al sustituir en ésta por valor numérico dado y realizar las operaciones indicadas.

$L(r) = 2\pi r$

$r = 5$ cm. $L(5) = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$ cm

$S(l) = l^2$

$l = 5$ cm $A(5) = 5^2 = 25$ cm^2

$V(a) = a^3$

$a = 5$ cm $V(5) = 5^3 = 125$ cm^3

Tipos de expresiones algebraicas

Monomio: Un monomio **es una** expresión algebraica **formada por** un solo término.

Binomio: Un binomio **es una** expresión algebraica **formada por** dos términos.

Trinomio: Un trinomio **es una** expresión algebraica **formada por** tres términos.

Polinomio: Un polinomio **es una** expresión algebraica **formada por** más de un término.

Monomios: Un **monomio** es una **expresión algebraica** en la que las únicas **operaciones** que aparecen entre las variables son el **producto y la potencia de exponente natural**.

$2x^2 y^3 z$

Partes de un monomio

Coeficiente: El coeficiente **del** monomio **es el número que aparece multiplicando a las variables.**

Parte literal: La parte literal **está constituida por las letras y sus exponentes.**

Grado: El grado **de un** monomio **es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.**

El grado de $2x^2 y^3 z$ es: $2 + 3 + 1 = 6$

Monomios semejantes: Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

$2x^2 y^3 z$ es semejante a $5x^2 y^3 z$

Operaciones con monomios

Suma de monomios: Sólo podemos sumar monomios semejantes**.**

La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

$\mathbf{ax^n + bx^n = (a + b)x^n}$ - $2x^2 y^3 z + 3x^2 y^3 z = 5x^2 y^3 z$

Si los **monomios no** son **semejantes** se obtiene un **polinomio**. $2x^2 y^3 + 3x^2 y^3 z$

Producto de un número por un monomio: El producto de un número por un monomio **es otro** monomio semejante **cuyo** coeficiente **es el** producto del coeficiente **de monomio** por el número**.**

$5 \cdot (2x^2 y^3 z) = 10x^2 y^3 z$

Multiplicación de monomios: La multiplicación de monomios **es otro** monomio **que tiene por** coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tenga la misma base.

$\mathbf{ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}}$

$(5x^2 y^3 z) \cdot (2 y^2 z^2) = 10 x^2 y^5 z^3$

División de monomios: Sólo se pueden dividir monomios **con la** misma parte literal **y con el** grado del dividendo mayor o igual **que el** grado **de la variable correspondiente del** divisor**.**

La **división de monomios** es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.**

$\mathbf{ax^n : bx^m = (a : b)x^{n-m}}$ - $\dfrac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} = 2xy^2$

Si el **grado del divisor es mayor**, obtenemos una **fracción algebraica**.

$$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^5y^2z^4} = \frac{2y^2}{x^2z^2}$$

Potencia de un monomio: Para realizar la potencia de un monomio **se eleva, cada elemento de éste, al exponente de la potencia.** $(ax^n)^m = a^m \cdot x^{n \cdot m}$

$(2x^3)^3 = 2^3 \cdot (x^3)^3 = 8x^9$

$(-3x^2)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 = -27x^6$

Polinomios: Un polinomio es una expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Siendo a_n, a_{n-1} ... a_1 , a_0 números, llamados **coeficientes**.

n un número natural.

X la variable o indeterminada.

a_n **es el coeficiente principal.**

a_0 **es el término independiente.**

Grado de un polinomio: El grado **de un** polinomio **P(x) es el** mayor exponente **al que se encuentra elevada la** variable **x.**

Clasificación de un polinomio según su grado

Primer grado: $P(x) = 3x + 2$

Segundo grado: $P(x) = 2x^2 + 3x + 2$

Tercer grado: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Tipos de polinomios

Polinomio nulo: Es aquel polinomio **que tiene todos sus coeficientes nulos.**

Polinomio homogéneo: Es aquel polinomio **en el todo su término o monomios son del mismo grado.**

$P(x) = 2x^2 + 3xy$

Polinomio heterogéneo: Es aquel polinomio **en el que sus términos no son del miso grado.**

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3$

Polinomio completo: Es aquel polinomio **que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.**

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$

Polinomio ordenado: Un polinomio **está** ordenado **si los** monomios **que lo forman están escritos de** mayor a menor grado**.**

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

Polinomios iguales: Dos polinomios **son iguales si verifican:**

1Los dos **polinomios** tienen el **mismo grado**.

2Los **coeficientes** de los términos del mismo grado son i**guales**.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

$Q(x) = 5x - 3 + 2x^3$

Polinomios semejantes: Dos polinomios **son semejantes si verifican que tienen** la misma parte literal.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ - $Q(x) = 5x^3 - 2x - 7$

Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$; $x = 1$ $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$

Suma de polinomios: Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ $Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

1**Ordenamos** los **polinomios**, si no lo están.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2**Agrupamos** los **monomios** del **mismo grado**.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$

3**Sumamos los monomios semejantes**.

$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

$P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2 \qquad Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$

$$\begin{array}{lllll} 7x^4 & & +4x^2 & +7x & +2 \\ & 6x^3 & & +8x & +3 \\ \hline 7x^4 & +6x^3 & +4x^2 & +15x & +5 \end{array}$$

$P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$

Resta de polinomios: La resta de polinomios **consiste en** sumar el opuesto del sustraendo**.**

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$

$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$

Multiplicación de polinomios: Multiplicación de un número por un polinomio

Es otro **polinomio** que tiene de **grado** el **mismo** del polinomio y como **coeficientes** el **producto de los coeficientes del polinomio por el número**.

$3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se **multiplica el monomio** por todos y **cada** uno de los **monomios que forman el polinomio**.

$3x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$

Multiplicación de polinomios

$P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$

$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$

Se suman los monomios del mismo grado.

$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$ Se obtiene otro ***polinomio*** cuyo **grado** es la **suma** de los **grados** de los **polinomios** que se **multiplican**.

También podemos **multiplicar polinomios** de siguiente modo:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & \\
 & & & 2x^2 & -3 & \\
\hline
 & & -6x^3 & +9x^2 & -12x & \\
4x^5 & -6x^4 & +8x^3 & & & \\
\hline
4x^5 & -6x^4 & +2x^3 & +9x^2 & -12x &
\end{array}$$

Ejercicio:

Efectuar de dos modos distintos la **multiplicación de los polinomios**:

$P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 - x + 3$

$P(x) \cdot Q(x) = (3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) \cdot (2x^2 - x + 3) =$

$= 6x^6 - 3x^5 + 9x^4 + 10x^5 - 5x^4 + 15x^3 -$

$- 4x^3 + 2x^2 - 6x + 6x^2 - 3x + 9 =$

$= 6x^6 + 7x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 9x + 9$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 3x^4 & +5x^3 & & -2x & +3 \\
 & & & & 2x^2 & -x & +3 \\
\hline
 & & 9x^4 & +15x^3 & & -6x & +9 \\
 & -3x^5 & -5x^4 & & +2x^2 & -3x & \\
6x^6 & +10x^5 & & -4x^3 & +6x^2 & & \\
\hline
6x^6 & +7x^5 & +4x^4 & +11x^3 & +8x^2 & -9x & +9
\end{array}$$

División de polinomios: **Resolver la división de polinomios:**

$P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ - **P(x): Q(x)**

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio **no es completo** dejamos **huecos** en los lugares que correspondan.

$$x^5 \qquad +2x^3 \qquad -x-8 \qquad \left| \underline{\,x^2-2x+1\,} \right.$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad +2x^3 \qquad -x-8 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3 \\
\qquad 2x^4+x^3 \qquad -x-8 &
\end{array}
$$

Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$2x^4 : x^2 = 2\,x^2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad +2x^3 \qquad -x-8 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3+2x^2 \\
\qquad 2x^4+x^3 \qquad -x-8 & \\
\quad \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & \\
\qquad\qquad 5x^3-2x^2-x-8 &
\end{array}
$$

Procedemos igual que antes.

$5x^3 : x^2 = 5\,x$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad +2x^3 \qquad -x-8 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3+2x^2+5x \\
\qquad 2x^4+x^3 \qquad -x-8 & \\
\quad \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & \\
\qquad\qquad 5x^3-2x^2-x-8 & \\
\qquad\quad \underline{-5x^3+10x^2-5x} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x^2-6x-8 &
\end{array}
$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$8x^2 : x^2 = 8$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\
\qquad 2x^4 + x^3 & \\
\quad \underline{- 2x^4 + 4x^3 - 2x^2} & \\
\qquad\qquad 5x^3 - 2x^2 - x & \\
\qquad\quad \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x^2 - 6x - 8 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{- 8x^2 + 16x - 8} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 10x - 16 &
\end{array}
$$

10x − 6 es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

$x^3 + 2x^2 + 5x + 8$ es el **cociente**.

Regla de Ruffini: **Paolo Ruffini** (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableció un método más breve para hacer la **división de polinomios**, cuando el **divisor es un binomio de la forma x — a**.

Regla de Ruffini: Para explicar los pasos a aplicar en la **regla de Ruffini** vamos a tomar de ejemplo la división: $(x^4 - 3x^2 + 2): (x - 3)$

1**Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.**

2**Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.**

3**Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independendiente del divisor.**

4**Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.**

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\
3 & & & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

5**Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.**

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

6**Sumamos los dos coeficientes.**

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1	3			

7**Repetimos el proceso anterior.**

	1	0	-3	0	2
3		3	9		
	1	3	6		

Volvemos a repetir el proceso.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	
	1	3	6	18	

Volvemos a repetir.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

8**El último número obtenido**, 56, **es el resto**.

9**El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.**

$x^3 + 3\,x^2 + 6x + 18$

Ejemplo

Dividir por la regla de Ruffini:

$(x^5 - 32) : (x - 2)$

	1	0	0	0	0	- 32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

$R = 0$

Identidades notables

Binomio al cuadrado

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

Suma por diferencia

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

Binomio al cubo

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$

$(x + 3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 =$

$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Trinomio al cuadrado

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

$(x^2 - x + 1)^2 =$

$= (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-x) + 2x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1 =$

$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x =$

$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Suma de cubos

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

$8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

Diferencia de cubos

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

Producto de dos binomios que tienen un término común

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x + 2)(x + 3) =$

$= x^2 + (2 + 3) \cdot x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma (x − a) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x = a.

Calcular por el teorema del resto el resto de la división:

P(x): Q(x)

$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ $\qquad Q(x) = x - 3$

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

$P(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 = 56$

Raíces de un polinomio - Teorema del factor

El polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma (x − a) si y sólo si P(x = a) = 0.

Al valor **x = a** se le llama **raíz** o **cero** de P(x).

Raíces de un polinomio: Son los valores que anulan el polinomio.

Calcular las raíces del polinomio:

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$P(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

x = 2 y x = 3 son raíces o ceros del polinomio: $P(x) = x^2 - 5x + 6$, porque **P (2) = 0 y P (3) = 0.**

Propiedades de las raíces y factores de un polinomio

1**Los ceros o raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente del polinomio.**

2**A cada raíz del tipo x = a le corresponde un binomio del tipo (x − a).**

3 **Podemos expresar un polinomio en factores al escribirlo como producto de todos los binomios del tipo (x — a), que se correspondan a las raíces, x = a, que se obtengan.**

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

4**La suma de los exponentes de los binomios ha de ser igual al grado del polinomio.**

5**Todo polinomio que no tenga término independiente admite como raíz x = 0, ó lo que es lo mismo, admite como factor x.**

$x^2 + x = x \cdot (x + 1)$

Raíces: $x = 0$ y $x = -1$

6**Un polinomio se llama irreducible o primo cuando no puede descomponerse en factores.**

$P(x) = x^2 + x + 1$

Hallar las raíces y descomponer en factores el polinomio:

$Q(x) = x^2 - x - 6$ - Los divisores del término independiente son: ±1, ±2, ±3.

$Q(1) = 1^2 - 1 - 6 \neq 0$

$Q(-1) = (-1)^2 - (-1) - 6 \neq 0$

$Q(2) = 2^2 - 2 - 6 \neq 0$

$Q(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$

$Q(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$

Las raíces son: x = -2 y x = 3.

$Q(x) = (x + 2) \cdot (x - 3)$

Factorización de un polinomio - Métodos

Sacar factor común: Consiste en aplicar la propiedad distributiva: a · b + a · c + a · d = a (b + c + d)

Descomponer en factores **sacando factor común y hallar las raíces**

1 $\mathbf{x^3 + x^2 = x^2 (x + 1)}$ - Las **raíces** son: $x = 0$ y $x = -1$

2 $\mathbf{2x^4 + 4x^2 = 2x^2 (x^2 + 2)}$

Sólo tiene una **raíz** X = 0; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

3 $\mathbf{x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a) = (x - a) \cdot (x - b)}$

La **raíces** son x = a y x = b.

Igualdad notable

Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia.

$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$

Descomponer en factores y hallar las raíces

1 $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

2 $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado.

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Descomponer en factores los trinomios cuadrados perfectos y hallar sus raíces

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$3^2 \quad 2 \cdot 3 \cdot x \quad x^2$$

La raíz es x = −3, y se dice que es una **raíz doble**.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$x^2 \quad 2 \cdot x \cdot 2 \quad 2^2$$

- **La raíz es x = 2.**

Trinomio de segundo grado

Para **descomponer en factores el trinomio de segundo grado** $P(x) = ax^2 + bx + c$, **se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado**. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2, el polinomio descompuesto será:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

Descomponer en factores los trinomios de segundo grado y hallar sus raíces

$x^2 - 5x + 6$ - $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son x = 3 y x = 2.

$x^2 - x - 6$ - $x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$ - **Las raíces son x = 3 y x = − 2.**

Descomponer en factores los trinomios de cuarto grado de exponentes pares y hallar sus raíces

$x^4 - 10x^2 + 9$

$x^2 = t$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x^2 = 1 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

$x^4 - 2x^2 - 3$

$x^2 = t$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x^2 = 3 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{3}$

$x^2 = -1 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

Factorización de un polinomio de grado superior a dos

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini para encontrar las raíces enteras.

Descomposición de un polinomio de grado superior a dos y cálculo de sus raíces

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

1Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

2Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

3Dividimos por Ruffini.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

4Por ser la división exacta, **D = d · c.**

$(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$

Una raíz es $x = 1$.

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$

Otra raíz es $x = -1$.

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar **raíces enteras**.

El 1 lo descartamos y seguimos probando por −1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & -6 \\ -2 & & -4 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

Sacamos **factor común** 2 en último binomio y encontramos una raíz racional.

$2x - 3 = 2\,(x - 3/2)$

La **factorización del polinomio** queda:

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2\,(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3/2)$

Las raíces son : $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$ y $x = 3/2$

Todas las raíces son racionales

Puede suceder que el polinomio no tenga raíces enteras y sólo tenga raíces racionales.

En este caso tomamos los divisores del término independiente dividido entre los divisores del término con mayor grado, y aplicamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

$P(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$

Probamos por: $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

	12	8	−3	−2
$\frac{1}{2}$		6	7	2
	12	14	4	0

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

$$12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 14\cdot\frac{1}{2} + 4 \neq 0$$

$$12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 14\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0$$

	12	14	4
$-\frac{1}{2}$		−6	−4
	12	8	0

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(12x + 8\right)$$

Sacamos factor común 12 en el tercer factor.

$$12\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

P(x) es el numerador y Q(x) el denominador.

Fracciones algebraicas equivalentes

Dos fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad y \quad \frac{R(x)}{S(x)}$$

son equivalentes, y lo representamos por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

si se verifica que P(x) · S(x) = Q(x) · R(x).

$$\frac{x+2}{x^2-4} \quad y \quad \frac{1}{x-2}$$

son **equivalentes** porque:

$(x+2) \cdot (x-2) = x^2 - 4$

Dada una fracción algebraica, **si multiplicamos el numerador y el denominador** de dicha fracción **por un mismo polinomio distinto de cero, la fracción algebraica resultante es equivalente a la dada.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\cdot M(x)}{Q(x)\cdot M(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x):M(x)}{Q(x):M(x)}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para **simplificar una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.**

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

Amplificación de fracciones algebraicas

Para **amplificar** una **fracción algebraica** se **multiplica** el **numerador** y el **denominador** de la fracción por un **polinomio**.

$$\frac{(x+2)}{(x-2)}\cdot\frac{(x+2)}{(x+2)} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Dadas dos **fracciones algebraicas**, reducirlas a común denominador **es encontrar** dos **fracciones algebraicas equivalentes con el mismo denominador.**

Reducir a común denominador las fracciones:

$$\frac{x}{x^2-1} \quad y \quad \frac{1}{x^2+3x+2}$$

1**Descomponemos los denominadores en factores para hallarles el mínimo común múltiplo, que será el común denominador.**

$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

$x^2 + 3x + 2 = (x +1) \cdot (x + 2)$

m.c.m. $(x^2 - 1, x^2 + 3x + 2) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

2**Dividimos el común denominador entre los denominadores de las fracciones dadas y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente.**

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)}=(x+2)$$

$$\frac{x\cdot\ (x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2+2x}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)}=(x-1)$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{(x-1)}{x^3+2x^2-x-2}$$

Suma de fracciones algebraicas

La suma de fracciones algebraicas con el mismo denominador es otra fracción algebraica con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores.

Sumar las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2-x}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{x+3}{x^2-5x+6}=$$

$$=\frac{x^2-x+1-(x+3)}{x^2-5x+6}=\ =\frac{x^2-x+1-x-3}{x^2-5x+6}=\ =\frac{x^2-2x-2}{x^2-5x+6}$$

Fracciones algebraicas con distinto denominador

En primer lugar se ponen las fracciones algebraicas a común denominador, posteriormente se suman los numeradores.

Sumar las fracciones algebraicas:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=$$

$$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$$

$$\text{m.c.m.}\left(x+1,\ x^2-1,\ x-1\right)=(x+1)\cdot(x-1)$$

$$=\frac{x-1+2x-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$= \frac{x - 1 + 2x - x - 1}{(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{2x - 2}{(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{2}{(x+1)}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica donde el numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$$

Multiplicar las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x)\cdot(x^2 + 4x + 4)}{(x^2 - 5x + 6)\cdot(x^2 - 4)} =$$

$$= \frac{x\,(x-2)\cdot(x+2)^2}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)} =$$

$$= \frac{x\,(x+2)}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

División de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica con numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y con denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$

Dividir las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} : \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + 4x + 4)} =$$

$$= \frac{x(x+2) \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2} = \qquad = \frac{x}{x-3}$$